سوال ۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

$$\cos 2x + 3\sin x = 2$$

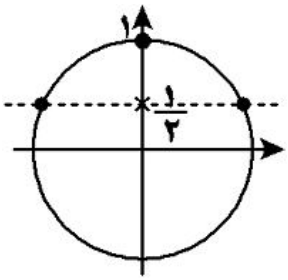
$$\Rightarrow 1 - 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow -2\sin^2 x + 3\sin x - 1 = 0 \quad (1)$$

به‌جای $\sin x$ در معادلهٔ (۱)، t قرار می‌دهیم؛ در نتیجه داریم:

$$-2t^2 + 3t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1,\ t = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\xrightarrow{x\in[0,2\pi]} x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$$

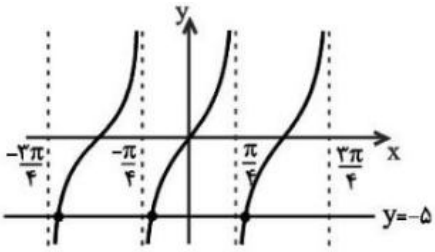
سوال ۲

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$5 + \tan 2x = 0 \Rightarrow \tan 2x = -5$$

جواب‌های معادله‌ی بالا، محل‌های تلاقی نمودار تابع $y = \tan 2x$ با خط $y = -5$ است. از آنجایی‌که دوره‌ی تناوب تابع $y = \tan 2x$، $T = \frac{\pi}{2}$ است، پس در هر بازه‌ای به‌طول $\frac{\pi}{2}$ یک شکل کامل از تابع تانژانت رسم می‌شود و نمودار آن با توجه به بازه‌ها به‌صورت زیر است.



با توجه به نمودار دیده می‌شود که خط $y = -5$ در بازه‌ی $(0\ ,\ \frac{-3\pi}{4})$ نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند و معادله در این بازه دو ریشه دارد.

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

معادلهٔ داده شده را ساده کرده و برحسب یک نسبت مثلثاتی نوشته و حل می‌کنیم:

$$\cos 2x + \sin 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = -\sin 2x$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \left(2x + \frac{\pi}{2}\right) & \text{غ ق ق} \\ 2x = 2k\pi - \left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad K \in Z$$

جواب‌های این معادله در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ برابر $\frac{-5\pi}{8}$ و $-\frac{\pi}{8}$ و $\frac{3\pi}{8}$ و $\frac{7\pi}{8}$ است که مجموع آن‌ها برابر $\frac{\pi}{2}$ می‌شود.

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

$$2\sin x \cos x + 1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x + \cos x$$

$$(2\sin x - 1)\cos x - (2\sin x - 1)\sin x = 0$$

$$\Rightarrow (2\sin x - 1)(\cos x - \sin x) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \xrightarrow{0<x<2\pi} x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \\ \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x \xrightarrow{0<x<2\pi} x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$$

سوال ۵

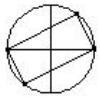
پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

$$1 - 2\sin^2 x = 1 - 2\sin x \cos x \Rightarrow 2\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x(\sin x - \cos x) = 0 \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = \cos x \Rightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi & k \in Z \\ x = k\pi + \frac{\pi}{4} & k \in Z \\ 0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} & k \in Z \end{cases}$$



پس جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی به‌صورت $x = k\pi$ و $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ بوده و بر روی دایره مثلثاتی یک مستطیل تشکیل می‌دهد.

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۲

گزینه ی «۲»

به کمک رابطه $\tan(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1-\tan x}{1+\tan x}$ داریم:

$$\tan(\frac{\pi}{4} - x) = \tan 3x \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16} \quad ; \quad k \in Z$$

حال باید این جواب‌ها در بازه $[0, 2\pi]$ باشند:

$$0 \le \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16} \le 2\pi \Rightarrow -\frac{1}{16} \le \frac{k}{4} \le \frac{31}{16} \Rightarrow -\frac{1}{4} \le k \le \frac{31}{4} \xrightarrow{k\in Z} k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 7\}$$

این معادله ۸ جواب دارد.

سوال ۷

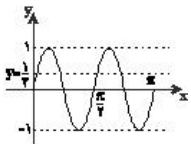
پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$\sin x\cos^3 x + \cos x\sin^3 x = \sin x \cos x(\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{6}$$

پس معادله به فرم $\sin 2x = \frac{1}{3}$ در می‌آید. نمودار $y = \sin 2x$ از انقباض افقی نمودار $y = \sin x$ با ضریب ۲ به‌دست می‌آید.

با توجه به شکل زیر، نمودارهای $y = \sin 2x$ و $y = \frac{1}{3}$ در بازه $[0, \pi]$ ۲ نقطه تلاقی دارند، پس معادله دارای ۲ ریشه است.



سوال ۸

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$\begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos 2x}{\cos x} = -2\sin x \xrightarrow{\cos x \neq 0} \cos 2x = -2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = -\sin 2x \Rightarrow \tan 2x = -1$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

$$0 \le \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \le 3\pi \Rightarrow 0 \le k - \frac{1}{4} \le 6$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \le k \le 6/25 \Rightarrow k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$\tan x = ۴\cos ۲x - \cot x \Rightarrow \tan x + \cot x = ۴\cos ۲x$

$\Rightarrow \frac{۲}{\sin ۲x} = ۴\cos ۲x \Rightarrow \frac{۱}{\sin ۲x} = ۲\cos ۲x$

$\Rightarrow ۲\sin ۲x \cos ۲x = ۱ \Rightarrow \sin ۴x = ۱$

$\Rightarrow ۴x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}; k \in Z$

k	۰	۱	۲
x	$\frac{\pi}{۸}$	$\frac{۵\pi}{۸}$	$\frac{۹\pi}{۸}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{۸} + \frac{۵\pi}{۸} = \frac{۶\pi}{۸} = \frac{۳\pi}{۴}$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

ابتدا $\tan ۲\alpha$ را به‌دست می‌آوریم:

$\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha} = \frac{۲(۳)}{۱-۳^۲} = -\frac{۳}{۴}$

حال به کمک رابطه $\tan(\alpha+\beta)$، مقدار $\tan ۳\alpha$ را حساب می‌کنیم:

$\tan ۳\alpha = \tan(۲\alpha + \alpha) = \frac{\tan ۲\alpha + \tan\alpha}{۱-\tan ۲\alpha \tan\alpha}$

$= \frac{-\frac{۳}{۴}+۳}{۱-\left(-\frac{۳}{۴}\right)(۳)} = \frac{\frac{۹}{۴}}{۱+\frac{۹}{۴}} = \frac{\frac{۹}{۴}}{\frac{۱۳}{۴}} = \frac{۹}{۱۳}$

پس $\cot ۳\alpha = \frac{۱۳}{۹}$ و در نتیجه $x = ۱۳$ است.